Теорема Виета.

8 класс

.

Все дома решили уравнения вида $x^2 + px + q = 0$. Получили корни:

уравнение	x_1	x_2
$x^2 - 3x + 4 = 0$	4	-1
$x^2 - 5x - 14 = 0$	-2	7
$x^2 + 5x + 6 = 0$	-2	-3
$x^2 + 5x - 6 = 0$	1	-6

Надо установить связь между

x_1, x_2 и p; $\qquad x_1 + x_2 = -p$,

x_1, x_2 и q. $\qquad x_1 \cdot x_2 = q$.

Прекрасно!

Мы установили это из данных уравнений.

Проверим гипотезу!

а) $x^2 - 8x - 6 = 0$,

$\frac{D}{4} = \sqrt{22}$, $\qquad x_1 + x_2 = 4 + \sqrt{22} + 4 - \sqrt{22} = 8$,

$x_1 = 4 + \sqrt{22}, \quad x_2 = 4 - \sqrt{22}.$ $\qquad x_1 \cdot x_2 = (4 + \sqrt{22})(4 - \sqrt{22}) = 16 - 22 = -6$.

Гипотеза верна!

б) $x^2 - 12x + 36 = 0,$

$(x-6)^2 = 0,$ $\qquad x_1 + x_2 = 6 + 6 = 12,$

$x = 6.$ $\qquad x_1 \cdot x_2 = 6 \cdot 6 = 36.$

Уравнение имеет два равных корня.

Гипотеза верна!

в) $x^2 + 2x + 5 = 0,$

$\frac{D}{4} = -4,\ -4 < 0$, действительных корней нет.

Значит, *гипотеза неверна?*

Гипотезу надо уточнить!

Если уравнение $x^2 + px + q = 0$ **имеет корни, то** $x_1 + x_2 = -p,\ x_1 \cdot x_2 = q.$

Теперь эту **гипотезу надо доказать!** Открыл и доказал эту теорему французский ученый математик Франсуа Виет. Домашним заданием вам будет законспектировать доказательство этой теоремы одним из способов из учебника и поискать материал о жизни и деятельности Ф. Виета.

А сейчас мы докажем ее другим способом.

Пусть x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Надо получить: $x_1 + x_2 = -p, \ x_1 \cdot x_2 = q.$

Что значит x_1 и x_2 корни уравнения?

$$x_1^2 + px_1 + q = 0, \qquad (1)$$

$$x_2^2 + px_2 + q = 0, \qquad (2)$$

Вычтем из (1) уравнения (2), получим:

$$x_1^2 - x_2^2 + px_1 - px_2 + q - q = 0,$$

$$\left(x_1^2 - x_2^2\right) + p\left(x_1 - x_2\right) = 0,$$

$$\left(x_1 - x_2\right)\left(x_1 + x_2\right) + p\left(x_1 - x_2\right) = 0,$$

$$\left(x_1 - x_2\right)\left(x_1 + x_2 + p\right) = 0,$$

$$x_1 - x_2 = 0 \quad \text{или} \quad x_1 + x_2 + p = 0,$$

докажем этот случай $\quad x_1 + x_2 = -p,$

на консультации $\quad p = -\left(x_1 + x_2\right)$

Подставим найденной значение для p в (1) уравнение:

$$x_1^2 - \left(x_1 + x_2\right)x_1 + q = 0,$$

$$x_1^2 - x_1^2 - x_1x_2 + q = 0,$$

$$-x_1x_2 + q = 0,$$

$$x_1x_2 = q.$$

Получили: $x_1 + x_2 = -p,$

$x_1 \cdot x_2 = q.$

Мы открыли, потом **доказали теорему Виета.**

Верна и обратная теорема.

Дано: m, n – числа,

$m + n = -p, \quad m \cdot n = q.$

Доказать: m, n – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Доказательство:

$$x^2 - \left(m + n\right)x + mn = 0,$$

$m^2 - \left(m + n\right)m + mn = 0, \qquad n^2 - \left(m + n\right)n + mn = 0,$

$m^2 - m^2 - mn + mn = 0, \qquad n^2 - n^2 - mn + mn = 0,$

$0 = 0$ (верно) $\quad\quad\quad\quad$ $0 = 0$ (верно)

m – корень $\quad\quad\quad\quad$ n – корень.

ч.т.д.

Где использовать теорему Виета?

1). Можно, не находя корни, найти сумму и произведение корней квадратного уравнения вида $x^2 + px + q = 0$: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$

2). Не решая уравнение $x^2 + 2x - 1 = 0$, найти $x_1^2 + x_2^2$.

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-2)^2 - 2 \cdot (-1) = 6.$$

Итак, $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

Где использовать теорему, обратную теореме Виета?

а). Можно проверить правильность решения квадратного уравнения.

$$x^2 + 3x - 40 = 0,$$

$$D = 169,$$

$$x_1 = -8, \quad x_2 = 5.$$

Покажем, что корни уравнения найдены правильно:

$x_1 + x_2 = -3,$ $\quad\quad\quad\quad$ $x_1 \cdot x_2 = -40,$

$-8 + 5 = -3.$ $\quad\quad\quad\quad$ $-8 \cdot 5 = -40.$

Значит, по теореме, обратной теореме Виета, числа – 8 и 5 являются корнями уравнения $x^2 + 3x - 40 = 0$.

б). Найти подбором корни квадратного уравнения (устно):

$$x^2 - 9x + 20 = 0,$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0,$$

$$x^2 - x - 6 = 0,$$

$$3x^2 - 6x + 2\frac{2}{3} = 0.$$

Как быть, если уравнение имеет вид $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Стихотворение «Теорема Виета», поэт Александр Гуревич:

По праву достойна в стихах быть воспета
О свойствах корней теорема Виета.
Что лучше, скажи, постоянства такого:
Умножишь ты корни – и дробь уж готова:
В числителе c, в знаменателе a,
А сумма корней тоже дроби равна.

Хоть с минусом дробь эта, что за беда –

В числителе b, в знаменателе a.

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0,$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}, \qquad x_1+x_2=-\frac{b}{a}.$$

Итак, $3x^2-6x+2\frac{2}{3}=0,$

$$x^2-2x+\frac{8}{9}=0,$$

$$x_1=\frac{2}{3}, \qquad x_2=\frac{4}{3}.$$

Итак, мы научились применять теорему Виета и обратную ей для уравнений вида $x^2+px+q=0$ и $ax^2+bx+c=0.$

Угадайте корни уравнений:

$$2x^2-196x+194=0, \qquad x^2+271x-272=0.$$

Что трудно? Тогда решите сначала три таких уравнения, найдя корни подбором.

$x^2+x-2=0,$	$x^2+2x-3=0,$	$x^2-3x+2=0,$
$x_1=-2,\ x_2=1.$	$x_1=-3,\ x_2=1.$	$x_1=2,\ x_2=1.$

Что вы заметили? (Один из корней равен 1).

Установите связь между a,b,c и корнями. Если $a+b+c=0$, тогда один из корней 1, а другой $\frac{c}{a}$.

Теорему Виета применяют для решения квадратных уравнений, где $a+b+c=0$ или $a-b+c=0$**.** Это дает значительное преимущество для быстрого получения ответа.

Если в уравнении $ax^2+bx+c=0$ $a+b+c=0$, то один из его корней 1, а другой $\frac{c}{a}$.

Если в уравнении $ax^2+bx+c=0$ $a-b+c=0$, то один из его корней – 1, а другой $-\frac{c}{a}$.

Теперь вернитесь к решению уравнений $2x^2-196x+194=0,$ $x^2+271x-272=0.$

Придумайте дома по 3 красивых уравнения и предложите решить их товарищу.